LOGARITMI

Definizione: il LOGARITMO in base "a" del numero "b" è l'ESPONENTE da attribuire alla base per ottenere una POTENZA uguale all'argomento "b"

Quindi: $\log_a(b)$: si legge logaritmo in: base a di b (si chiama argomento)

La sua soluzione: c è quel numero Reale ($\mathbb{R}$) tale per cui:

$$a^c = b$$

- Riassumendo: $\log_a(b)$ è il numero c tale che: $a^c = b$

e quindi il logaritmo in base a di b altro non è che l'operazione INVERSA dell'ELEVAMENTO a POTENZA.

- Ricordo: a = base, b = argomento, c = valore del logaritmo

b: è un numero POSITIVO, a: positivo e $\neq 1$

ES: $\log_a(1) = 0$ infatti se a (come da def. è un numero positivo e $\neq 1$) è un numero positivo, l'esponente a cui elevare un numero positivo affinché il risultato sia pari all'ARGOMENTO (1) è: 0

$\Rightarrow a^0 = 1$

ES 2. $\log_a(a^2) = 2$ qual è l'esponente con cui elevando la base "a" si ottiene l'ARGOMENTO: a^2?

$a^x = a^2$ ... come è facile capire quell'esponente è: 2

ES 3: $\log_3(27) = ? = 3$ trasformo 27 in $3^3 \Rightarrow \log_3(3^3)$ diventa facile capire che l'esponente da dare alla base perché dia come risultato l'ARGOMENTO è: $3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

ES 4: $\log_{10}(100) = x$ ... $x = \log_{10}(10^{10}) \Rightarrow 10^x = 10^{10} \Rightarrow x = 10$

ES 5. $\log_5(625) = x$ ... $x = 4$ in quanto $5^4 = 625$

M12

Ricordo: $a > 0$ perché se $a = 0$ non esiste un esponente per cui si possa ottenere un valore $\neq 0$ e $b > 0$

$b > 0$: se $b = 0$ nessun numero elevato a potenza può essere pari a 0 quindi $\log_a(0)$ NON ha SENSO

tornando ad: a se fosse negativo che problemi ci sarebbero? semplicemente si è voluto che la definizione valesse per TUTTI i numeri $\mathbb{R}$ e non solo per quelli razionali con denominatore dispari. (Ricordo che i numeri razionali sono rappresentati dalla frazione: a/b)

PROPRIETÀ dei LOGARITMI

1 • $\log_a(1) = 0$ infatti $a^0 = 1$

ES: $\log_{100}(1) = 0 \Rightarrow 100^0 = 1$

2 • $\log_a(a) = 1$ infatti $a^1 = a$

ES: $\log_{300}(300) = 1$ infatti $300^1 = 300$

3 • $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

ES. $\underbrace{\log_2(32)}_{2^5 = 32} = \log_2(4 \cdot 8) = \underbrace{\log_2(4)}_{2^2 = 4} + \underbrace{\log_2(8)}_{2^3 = 8} = 2 + 3 = 5$

Quindi il logaritmo di un PRODOTTO (di una moltiplicazione) è = alla SOMMA dei logaritmi di ogni fattore dell'argomento $\Rightarrow \log_a(b \cdot c \cdot d \ldots) = \log_a(b) + \log_a(c) + \log_a(d) \ldots$

4 • $\log_a(b/c) = \log_a(b) - \log_a(c)$

ES: $\underbrace{\log_2(4)}_{2^2 = 4} = \log_2(8/2) = \underbrace{\log_2(8)}_{2^3 = 8} - \underbrace{\log_2(2)}_{2^1 = 2} = 3 - 1 = 2$

5 • $\log_a(b^m) = m \cdot \log_a(b)$

ES: $\underbrace{\log_2(2)^3}_{\log_2(8) = 3 \Rightarrow 2^3 = 8} = 3 \cdot \log_2(2) = 3 \cdot 1 = 3$

ES 2: $\underbrace{\log_3(27)^4}_{\log_3(3^3)^4} = 4 \cdot \underbrace{\log_3(27)}_{3^3 = 27} = 4 \cdot 3 = 12$

$= \log_3(3^{12}) \Rightarrow x = 12$

6 · $\log_a(\sqrt[m]{b}) = \frac{1}{m}\log_a(b)$

$\underbrace{\log_a(\sqrt[m]{b})}_{\log_a(b)^{1/m}}$

ES: $\log_2(\sqrt[3]{8}) = \log_2(8)^{1/3} = \frac{1}{3}\log_2(8) = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1$

6b · $\log_a(\sqrt[m]{b^m}) = \frac{m}{m}\cdot\log_a(b)$

$\underbrace{\log_a(\sqrt[m]{b^m})}_{\log_a(b)^{m/m}}$

ES: $\log_2(\sqrt[3]{8^4}) = \frac{4}{3}\log_2 8 = \frac{4}{3}\cdot 3 = 4$ $\left[\log_2(\sqrt[3]{8^4} = \log_2(8^{4\cdot\frac{1}{3}}) = \log_2(8^{\frac{4}{3}})\right]$

I logaritmi più COMUNI:

- $\log = \log_{10}$ => $\log(b) = \log_{10}(b)$ => logaritmi decimali / in base 10
- $\ln = \ln_e$ => $\ln(b) = \ln_e(b)$ => logaritmi in base e : "e": numero di Neper

CAMBIO di BASE

- $\log_a(b) = \frac{\log_b(b)}{\log_b(a)}$ ma $\log_b(b) = 1$ => $\log_a(b) = 1/\log_b(a)$

quindi scambiando tra loro base e <-> argomento di un logaritmo si ottiene il RECIPROCO del logaritmo assegnato

- Formula generale per cambio di base:

$\log_a(b) = \log_c(b)/\log_c(a)$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1$

ES: $\log_{27}(81)$ ... 27 e 81 sono potenze del 3 => esprimiamo il logaritmo di partenza come logaritmo in base 3. => $\log_{27}(81) = \frac{\log_3(81)}{\log_3(27)} = \log_3(3^4)/\log_3(3^3) =$

$a = 27,\ b = 81,\ c = 3$

$= 4/3$

ES 2: calcolo del valore numerico di: $\log_7(721)$ ... trasformo la base da 7 a 10 che può essere calcolato con la calcolatrice: $\log_7(721) = \log_{10}(721)/\log_{10}(7) \cong 3{,}38$

Stessa cosa con $\ln$ => $\log_7(721) = \ln(721)/\ln(7) = \frac{6{,}581}{1{,}946} \cong 3{,}38$

M14

→ ES 1:

- $\log_4(128) \Rightarrow \log_4(128) = \log_{10}(128) / \log_{10}(4) = 3,5$

ma se non abbiamo la calcolatrice...

- $\log_4(2^7) \Rightarrow$ log lo trasformo in base 2 $\Rightarrow \dfrac{\log_2(2^7)}{\log_2(2^2)} = 7 \cdot \log_2(2) / 2 \cdot \log_2(2) =$

  ↳ $\log_{2^2}(2^7)$

  $\dfrac{7 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \dfrac{7}{2} = 3,5$

→ ES 2:

$\log_{0,25}(256) = \log_{\frac{1}{4}}(4^4) \Rightarrow$ trasformo il log in base 4: $\log_4(4^4) / \log_4\left(\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow \log_4(4^4) / \log_4(4^{-1}) = \dfrac{4}{-1} = -4$ $\Rightarrow$ Ricordo: $\dfrac{1}{4} = 4^{-1}$

→ ES 3:

$\log_{25}(3125) = \log_{5^2}(5^5) \Rightarrow$ trasf. in base 5 il log: $\log_5(5^5) / \log_5(5^2) = 5/2$

→ ES 4:

$\log_{\frac{1}{4}}(1/8) = \log_{\frac{1}{4}}(8^{-1}) = -\log_{\frac{1}{4}}(8) = -\log_{\frac{1}{4}}(2^3) \Rightarrow$ trasformo in base 2

$= -\log_2(2^3) / \log_2(1/4) = -3 / \log_2(4^{-1}) = \dfrac{-3}{-\log_2(2^2)} = +\dfrac{3}{2}$

→ ES 5:

$\log_{2\sqrt{2}}(4) = \log_{2\sqrt{2}}(2^2) \Rightarrow$ trasf. in log. a base 2 $= \log_2(2^2) / \log_2(2\sqrt{2})$

... trasformo il denominatore: $\log_2(2 \cdot 2^{1/2}) = \log_2(2^{3/2})$ ricordo: $2 \cdot 2^{1/2} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{3/2}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\log_2(3/2)} = 2 : \dfrac{3}{2} = 2 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$