SCOMPOSIZIONE con RUFFINI

- quando si usa? quando voglio SCOMPORRE un POLINOMIO e non riesco ad usare i: - Prodotti Notevoli o altri tipi di scomposizioni più semplici:

$\Rightarrow$

provo (mica è detto che si possa usare!) con

Regola di RUFFINI

Partiamo con un esempio:

- $x^3 - x + 6$

1) Può essere scomposto con i Prodotti Notevoli? NO... no quadrato di binomio, no cubo, no somma e differenza...
2) Esistono 2 numeri la cui SOMMA ci dà il coefficiente di $x = -1$ ed il prodotto ci dà $+6$? NO

$\Rightarrow$ no trinomio notevole!

$\Rightarrow$ 3) Provo con: RUFFINI

A) Per prima cosa determino i NUMERI DIVISORI del TERMINE NOTO (termine senza l'incognita). Nell'esempio il termine noto è: 6

Positivi e Negativi!! $\Leftarrow$

IMPORTANTISSIMO!!!

I numeri che dividono il T.N. senza dare resto sono:

$+1, -1 \; ; +2, -2 \; ; +3, -3 \; ; +6, -6$

es: $6:2 = 3$; $6:(-2) = -3$; $6:3 = 2$ e così via...

B) Tra i DIVISORI devo trovare quello che ANNULLA il POLINOMIO.

Che cosa significa in pratica?

Devo SOSTITUIRE alle incognite uno ad uno i divisori del termine noto finché non me trovo uno (sempre che ci sia!) che rende il polinomio $= 0$

Proviamo e capirai meglio:

Comincio con il primo divisore che ho trovato per il termine noto (T.N. = 6)

- Provo con: $x = 1$

$x^3 - x + 6$ con $x = 1$ diverrà: $1^3 - 1 + 6 = 6 \neq 0$ ... non va bene questo divisore perché sostituendo 1 alle x il polinomio è diventato pari a 6 e doveva diventare 0

- Provo allora con: $x = -1$ ottengo:

$(-1)^3 - (-1) + 6 = -1 + 1 + 6 : 6 \neq 0$ $\Rightarrow$ non va bene. Non si annulla il polinomio

- Continuo e provo con: $x = 2$

$(2)^3 - 2 + 6 = 8 - 2 + 6 = 12$ $\Rightarrow$ anche questo valore NON ANNULLA il polinomio...

- Provo con: $x = -2$

$(-2)^3 - (-2) + 6 = -8 + 2 + 6 = 0$: Sì!!! Finalmente ho trovato il VALORE di X che rende il polinomio pari a 0

Teniamo pronto il -2 perché fra poco ci servirà!

C) Dobbiamo ora dividere il polinomio per il divisore che abbiamo appena trovato (-2)

Come si fa? $\Rightarrow$ costruiamo una TABELLA!!

Riscrivo x comodità il polinomio per evidenziare i COEFFICIENTI e per aggiungere eventuali incognite di gradi mancanti (nel nostro es. abbiamo x^3, x^1... ma manca x^2...)

$$1x^3 + 0x^2 - 1x^1 + 6$$

... Divisore che annulla il polinomio $= -2$

Tabella

$\Downarrow$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

con: 1 : coeff. x^3
0 : coeff. x^2
-1 : coeff. x
6 : termine noto

-2 : coeff. che rende il polinomio pari a 0 (zero)

I passaggio) si scrive in basso il primo coefficiente del polinomio: 1.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & & -2^{*} & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

↳ Ho trasportato giù il I coefficiente

II) si moltiplica il coeff. 1 per il numero in basso a sx (il divisore) -2. Il risultato $(1\times(-2) = -2)$ lo si scrive SOTTO la II colonna

* -2: è il risultato della moltiplicazione: $1\times(-2)$

III) Si SOMMANO i numeri della II colonna $0+(-2)$ e si scrive il Risultato (-2) in basso

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & & -2 & 4^{IV} & \\ \hline & 1 & -2^{III} & & \end{array}$$

IV: si moltiplica la somma appena ottenuta e riportata in basso (-2) con il numero divisore a sinistra (-2). Il risultato si riporta in III colonna
$-2\times(-2) = 4$

V) Si SOMMANO i numeri nella III colonna $-1+4 = 3$ ed il risultato si riporta sotto

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & & -2 & 4 & -6^{VI} \\ \hline & 1 & -2 & 3^{V} & 0^{VII} \end{array}$$

VI) moltiplico il risultato appena ottenuto: 3 per il divisore in basso a sx (-2) il risultato lo riporto nella colonna del termine noto
$3\times(-2) = -6$

VII: Sommo i numeri nella IV colonna. Se i calcoli sono corretti devo ottenere 0 ... come è capitato nell'esempio: $6+(-6)=0$

Abbiamo quasi finito...
i valori 1 -2 3 sono i coeff. del polinomio chiamato "QUOZIENTE" è un polinomio che partirà da un GRADO inferiore di 1 UNITA' rispetto a quello INIZIALE!
Tornando all'esempio: x^3-x+6 ...
se il polinomio iniziale partiva dal grado 3 il nuovo polinomio partirà da 2
e sarà così composto: $1x^2-2x+3$
come puoi vedere i coefficienti sono quelli della Tabella!!

Non resta che scrivere il DIVISORE che abbiamo trovato ad inizio procedimento. Il famoso -2
Attenzione però: nella scomposizione andrà Cambiato di SEGNO ed andrà sommato ad x

UNIAMO il TUTTO ed otteniamo:

$$\underbrace{x^3-x+6}_{P(x)} = \underbrace{(x^2-2x+3)}_{Q(x)}\cdot\underbrace{(x+2)}_{\underbrace{(x-\text{valore del divisore})}_{(x-\text{div})}}$$

$$P(x) = Q(x)(x-\text{div})$$

ES 2 · $1x^4+5x^3+5x^2-5x-6$

1) Trovo i divisori del termine noto: Divisori di $6 = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

2) Sostituisco alle x i divisori di 6 finché il polinomio non diventa uguale a zero

Provo con: $+1 \Rightarrow 1\cdot1^4+5\cdot1^3+5\cdot1^2-5\cdot1^1-6 = 1+5+5-5-6=0$

OK: +1 annulla il Polinomio!

3) Costruisco la tabella:

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\
1 & & 1 & 6 & 11 & 6 \\
\hline
 & 1 & 6 & 11 & 6 & 0
\end{array}$$

[redacted]

$\Rightarrow (x^3+6x^2+11x+6)(x-1)$

Ricorda di cambiare il segno!!

Il polinomio appena ottenuto può essere ANCORA scomposto con RUFFINI !!!

1) Divisori del termine noto: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

-> provo ad annullare il polinomio con $x=-1$ $= (-1)^3+6\cdot(-1)^2+11(-1)+6 = -1+6-11+6=0$

-1 rende il polinomio $=0$!!

2) Tabella con i coefficienti:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 6 & 11 & 6 \\
-1 & & -1^{*} & -5^{+} & -6^{\times} \\
\hline
 & \underbrace{1 \quad +5 \quad 6} & & & 0
\end{array}$$

$* \; -1\cdot1=-1$
$+ \; -1\cdot5=-5$
$\times \; -1\cdot6=-6$

il polinomio si abbassa di 1 grado e da grado 3 passa a 2

$(1x^2+5x+6)$

al divisore -1 devo cambiare di segno $+1$

quindi la scomposizione del polinomio diventa: $(x^2+5x+6)(x+1)(x-1)$

... ed a questo punto?? mi fermo?? NO

x^2+5x+6 è infatti un Trinomio notevole ... cerchiamo due numeri tali che sommati diano 5 e moltiplicati diano 6 => i due numeri sono 2 e 3 quindi il polinomio può essere scomposto come:

$(x+2)(x+3)(x+1)(x-1)$

Potevamo applicare Ruffini al posto del Trinomio notevole? CERTO! ma era un procedimento + lungo

1) divisori di 6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

2) li devo provare se rendono il polinomio $=0$

3) Trovo che -2 rende il polinomio $=0$

4) Tabella

$$\begin{array}{c|cc|c}
 & 1 & 5 & 6 \\
-2 & & -2 & -6 \\
\hline
 & 1 & 3 & 0
\end{array}$$

La soluzione ovviamente è la stessa ma il procedimento è più lungo!

5) Riscrivo il polinomio abbassandolo di grado $(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)$

devo cambiare segno

Ruffini va usato se non ci sono altre soluzioni (metodi di scomposizione)

E se il coefficiente del termine con grado maggiore fosse $\neq 1$??
→ Lo caso si complica!
Bisognerà valutare TUTTI i divisori del: Termine Noto (come prima) ma anche quelli del coefficiente del Termine di grado maggiore ...(per trovare quali rendono il polinomio $= 0$).. e combinarli assieme!

ES: $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = P(x)$

1) DIVISORI di 6: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ di 2 $\{\pm 1, \pm 2\}$ combiniamoli assieme $\left\{+\frac{1}{1}, +\frac{1}{-1}, -\frac{1}{1}, -\frac{1}{-1} \dots\right.$
... come potete vedere le soluzioni si ripetono ... ⇒ è sufficiente considerarle una volta soltanto!
vediamo cambiando i divisori di 6 con il divisore di 2 pari a -2 che succede.

$$\left\{\frac{+1}{-2}, \frac{-1}{-2}, \frac{+2}{-2}, \frac{-2}{-2}, \frac{+3}{-2}, \frac{-3}{-2}, \frac{+6}{-2}, \frac{-6}{-2}\right\} = \left\{\underbrace{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}}, \underbrace{-1, +1}, \overbrace{-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}}^{\text{sol. nuove}}, \underbrace{-3 +3}\right\}$$

stesso caso se uniamo i divisori di 6 con $+2$ ma non mi sto a dilungare! } sol. nuove

soluzioni già trovate! non serve ripeterle

2) Cominciamo a provare: -1 vediamo se sostituendolo alla x il polinomio vale 0
$2(-1)^4 + (-1)^3 - 8(-1)^2 - (-1) + 6 = 2 - 1 - 8 + 1 + 6 = 0$ ⇒ divisore trovato: $-1 = \alpha$

3) Tabella con i coefficienti

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\ \text{divisore} \rightsquigarrow -1 & & -2 & +1 & +7 & -6 \\ \hline & 2 & -1 & -7 & +6 & 0 \end{array}$$

Il nuovo polinomio abbassato di grado sarà (da 4 a 3)
$2x^3 - x^2 - 7x + 6 = Q(x)$
Poiché Ruffini garantisce che $P(x) = Q(x)(x - \alpha)$

abbiamo che: $\underbrace{(2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6)}_{P(x)} = \underbrace{(2x^3 - x^2 - 7x + 6)}_{Q(x)} \cdot \underbrace{(x+1)}_{(x-\alpha)}$

... a questo punto ripetendo il procedimento possiamo applicare Ruffini sul nuovo polinomio
1) Divisori di termine noto e termine di grado maggiore combinati
2) Trovare quale divisore rende il polinomio $= 0$
3) Dividere il polinomio usando la tabella
4) moltiplicare il nuovo polinomio abbassato di un grado per $(x - \alpha)$ dove α è il divisore cambiato di segno

1) $\{\pm 1, \pm 2 \dots \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2} \dots \pm 6\}$

2) Provo con: $x = 1$ ⇒ $2 \cdot 1^3 - (1)^2 - 7(1) + 6 = 2 - 1 - 7 + 6 = 0$: OK
$\alpha = 1$

3)
$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -1 & -7 & 6 \\ 1 & & 2 & 1 & -6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$(2x^2 + x - 6)(x - \alpha)(x+1) = \underbrace{(2x^2 + x - 6)}(x - 1)(x+1)$

polinomio che può essere scomposto ancora con Ruffini o con i trinomi notevoli.
Usando i T. Notevoli trovo 2 numeri che sommati diano 1 e moltiplicati -12 ⇒ 4 e -3
Le soluzioni sono $(ax + t_1)(x + \frac{t_2}{a})$ con: a coefficiente del termine $x^2 = 2$

$(2x-3)(x+\frac{4}{2})(x-1)(x+1)$

Soluzione: $\|(2x-3)(x+2)(x-1)(x+1)\|$

ES. con RUFFINI

1. $x^3 - x - 24$

A. E' un prod. notevole che conosciamo? NO

B. E' il trinomio somma - prodotto? NO

C. Provo con RUFFINI!

↳ Trovo: DIVISORI del Termine Noto => quali numeri dividono 24 senza lasciare il resto?
bosta SCOMPORLO e prendere sia i valori positivi sia i negativi (*)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 3 \\ 4 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

intanto abbiamo ricavato $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \underset{\pm 6}{\pm 2\times 3}, \underset{\pm 8}{\pm 2\times 4}, \underset{\pm 24}{\pm 2\times 3\times 4}, \underset{\pm 12}{\pm 3\times 4}\}$

(*) E' una operazione così semplice che la scomposizione si può saltare nel 99% dei casi

D. Sostituisco, fino a che non trovo un valore che rende il polinomio $= 0$, i divisori appena trovati al posto delle X ... provo con $X = -1$

Se: $P(x) = x^3 - x - 24 \Rightarrow P(-1) = (-1)^3 - (-1) - 24 = -1 + 1 - 24 \neq 0$: non va bene!

... provo con un divisore > 2 perché c'è troppa differenza fra risultato e 0 ... ciò non toglie che avrei potuto provare sostituendo ad x anche i valori: $+1, -2, +2$ ...

Provo con: $X = 3$

$P(3) = (3)^3 - 3 - 24 = 27 - 3 - 24 = 0$!! 3 è un valore che ANNULLA, rende cioè pari a 0 il polinomio!!

E. Procedo a dividere il polinomio (a scomporre...)

Tabella:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & \underline{0} & -1 & -24 \\ 3 & & 3 & 9 & 24 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & 0 \end{array}$$

=> 1, -1, - 24 valori/coefficienti delle incognite e del termine noto
e lo 0? da dove spunta??
Ebbene per applicare la Regola di Ruffini NON devono esserci "SALTI" negli ESPONENTI delle INCOGNITE!
Nel ns. esempio abbiamo: $X^3 \ldots - X^1 - 24$
Come potete vedere manca il coefficiente di x^2! noi in tabella dobbiamo, per forza inserirlo. Lo consideriamo perciò come pari a 0

spiegazione

I) passaggio porto il coeff. iniziale sotto riga (vedi freccia ↓): Lo RICOPIO!

II) MOLTIPLICO il numero a sx (3) per il numero che ho appena copiato (1). Il risultato lo riporto nella II colonna $3 \cdot 1 = 3$.

III) SOMMO i valori nella II colonna $0 + 3 = 3$ ed il risultato lo scrivo sotto la riga

IV) Ripeto l'operazione II: moltiplico $3 \times 3 = 9$ e scrivo il risultato nella III colonna

V) Ripeto l'operazione n° III: Sommo $-1 + 9 = 8$

→ Scrivo il risultato: 8 sotto la riga

VI) Ripeto II: $3 \times 8 = 24$. Il risultato lo scrivo nell'ultima colonna quella del termine noto

VII) Ripeto III: $-24 + 24 = 0 \Rightarrow$ se la somma finale è pari a 0 TUTTO È OK

ora abbiamo i COEFFICIENTI: 1, 3, 8 del nuovo POLINOMIO che sarà abbassato di 1 grado rispetto a quello di partenza.

1. era x^3... ora il primo termine con incognita avrà grado: $x^{3-1} = x^2$

Quindi partendo dal termine al quadrato: $1x^2 + 3x + 8$ sarà la prima parte della mia scomposizione con Ruffini. La chiamerò $Q(x)$

$Q(x)$ dovrà essere "moltiplicata" per: il divisore che avevamo trovato al punto D ma cambiato di segno al quale aggiungeremo $+x$.

Per semplicità: divisore $= +3$, cambio di segno $= -3$ ... ricordo di aggiungere anche la x: otteniamo

$$(x-3)$$

Ora abbiamo tutti i dati!

$Q(x) = x^2+3x+8$ ... abbiamo $(x-3)$... MOLTIPLICHIAMOLI fra loro!!

$(x^2+3x+8)(x-3) = x^3 - x - 24$ ... Fine!

NOTA: in alcuni esercizi bisogna applicare Ruffini + volte. Ovviamente se le incognite le abbiamo ridotte al I grado siamo sicuri che non ci sarà più necessità di applicarlo!

ES 2: $x^3 + 5x^2 + 6x - x^2 - 5x - 6$

1) Riduco il polinomio in forma normale sommando/sottraendo i termini simili...

$\Rightarrow x^3 + 4x^2 + x - 6$

2) Trovo i divisori del termine noto: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

3) Trovo un divisore che rende pari a 0 il polinomio (sostituisco il valore del divisore alla x)

Provo con $x = 1$ $\Rightarrow 1^3 + 4\cdot 1^2 + 1 - 6 = 1+4+1-6 = 0$ OK: 1 è un divisore che rende il poli. $= 0$

4) Tabella

	1	4	1	−6
1		1	5	6
	1	5	6	0
coeff. di:	x^2	x	TN	

→ termine noto va fuori dalle colonne delle incognite!

...> svolgo il procedimento come nell'esempio precedente ... ottengo (x^2+5x+6) .. che andrà moltiplicato per $(x - \text{divisore})$

$\Rightarrow (x^2+5x+6)(x-1)$

Finito? No! x^2+5x+6 può essere ancora SCOMPOSTO! è un trinomio notevole, ma x esercizio useremo ancora Ruffini!!!

1) Divisori Termine Noto $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

2) Sostituisco per rendere polinomio $= 0$ ... $x = -2 \Rightarrow (-2)^2 + 5(-2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

-2 annulla il polinomio!

3) Coeff. in tabella:

	1	5	6
−2		−2	−6
	1	3	0

4) Associo i coeff. al nuovo polinomio abbassato di grado da $x^2 \to x$

$\Rightarrow (1x+3)(x - \text{valore del divisore}) \cdot (x - \text{valore del I divisore})$

$x - (-2)$

$$\Rightarrow (x+3)(x+2)(x-1)$$

ES 3: $\underbrace{x^3+2x^2}_{\text{Raccolgo } x_2}+\underbrace{2x+4}_{\text{Raccolgo } 2}$ ... se voglio fare esercizio uso Ruffini sennò provo a raccogliere parzialmente:

$x^2(x+2)+2(x+2) = \underline{\underline{(x+2)(x^2+2)}} = S$

↳ Esercizio svolto in circa : 15 secondi ...

... vediamo con Ruffini

1) Divisore del T. Noto: $4 \Rightarrow \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

2) Annullo il polinomio $\Rightarrow$ provo con i divisori : $x=1 \Rightarrow 1^3+2\cdot 1^2+2\cdot 1+4 \neq 0$

$x=-1 \Rightarrow -1^3+2(-1)^2+2(-1)+4 = -1+2-2+4 \neq 0$

$x=2 \Rightarrow 2^3+2\cdot 2^2+2\cdot 2+4 \neq 0$

$x=-2 \Rightarrow (-2)^3+2(-2)^2+2(-2)+4 = -8+8-4=4=0$: OK

3) Tabella con i coefficienti:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & & -2 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

4) Scrivo polinomio abbassandolo di 1 grado: da x^3 a $x^2 \Rightarrow x^2+0x+2 = x^2+2$

e lo moltiplico per il divisore (-2) cambiato di segno $(+2)+x$

$\Rightarrow \underline{\underline{(x^2+2)(x+2)}} = S$

Noto: stesso soluzione ma con tempi diversi!

RUFFINI va applicato se
- espressamente richiesto x fare un esercizio
- NON possiamo usare i Prodotti Notevoli
- NON possiamo RACCOGLIERE a fattor comune/parziale
- NON posso trovare un TRINOMIO NOTEVOLE tipo Somma/prodotto

ES 4:

x^2+2x+1

con Ruffini: divisore termine noto $\{\pm 1\}$ annullo il polinomio : $x=1 \Rightarrow 1+2+1 \neq 0$ ... tabella...

$x=-1 \Rightarrow 1-2+1=0$ OK

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow Q(x)=(x+1)$$

$(x-\text{divisore}) = (x-(-1)) = x+1$

Li moltiplico assieme $(x+1)(x+1) = (x+1)^2$...

... ed infatti applicando i Prodotti Notevoli avrei dovuto vedere subito che questo è un quadrato di binomio del tipo $(A+B)^2 \Rightarrow (x+1)^2$