RADICALI

a: numero Naturale, anzi Reale (Naturale è un insieme + limitato) } poi parlerò rapidamente degli insiemi numerici
n: numero naturale positivo

possiamo scrivere un RADICALE con indice "n" o radice n-esima di "a":

$$\sqrt[n]{a}$$

dobbiamo però distinguere 2 casi:

1 → n: numero DISPARI => si dice radice n-esima di "a" quel numero b che, ELEVATO ad n, ci restituisce "a"

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

2 → n: numero PARI => "a" deve essere POSITIVO !! => si dice radice n-esima di "a" quel numero POSITIVO b che, ELEVATO ad n, ci restituisce "a"

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \quad \text{con } a \geq 0,\ b \geq 0$$

• Nomenclatura: a = Radicando, n = indice di radice, $\sqrt{\ }$ = simbolo di radice

ES: $\sqrt[4]{16} = 2 \iff 2^4 = 16$, ES 2: $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4 \iff 4^2 = 16$

Nota: è vero che anche con $n = 2$ Pari $(-2)^2 = 4$, per non creare ambiguità però si è scelto di considerare come unica soluzione delle radice con n pari solo numeri POSITIVI => $\sqrt[2]{4} = +2$: SI! -2: non è accettabile!!

Da questo deriva anche che a dovrà forzatamente essere ≥ 0 (qualsiasi POTENZA con esponente Pari non può essere negativa => con n pari in $b^n = a$ dobbiamo per forza chiedere che a sia > 0)

RELAZIONE fra: RADICALI e POTENZE

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{per } \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 1 \ \dots \text{ generalizzando: } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$n, m \in \mathbb{N}$

M16

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

ES: $\sqrt[8]{x^3} = x^{\frac{3}{8}}$, $\sqrt[9]{a^2} = a^{\frac{2}{9}}$ ...

- Per definizione: $a^{-\frac{m}{n}} := \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ES: $\sqrt[2]{25} = \sqrt[2]{5^2} = 5^{\frac{2}{2}} = 5$

$$25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{25^1}} = \frac{1}{\sqrt[2]{5^2}} = \frac{1}{5^{2/2}} = \frac{1}{5}$$

Proprietà dei Radicali

- **Somma / Differenza**

→ possibile solo tra RADICALI SIMILI → STESSO → indice: n
→ radicando: a

⇒ Risultato: un nuovo RADICALE con: STESSO indice e radicando INIZIALI e per coefficiente la SOMMA/DIFFERENZA dei coefficienti

ES: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ... riordino mettendo assieme i RADICALI SIMILI: $(3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{2}) + (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) =$

a questo punto sommo i coefficienti dei radicali simili ed il gioco è fatto:

$$(3 - 5 + 1)\sqrt{2} + (2 + 4)\sqrt{3} = -\sqrt{2} + 6\sqrt{3}$$

ES 2: $6\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + \sqrt{3} = (6-3)\sqrt{5} + (2+1)\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

- **Prodotto di Radicali con lo STESSO INDICE**

Risultato = Radice che ha per indice lo stesso indice e per RADICANDO: il PRODOTTO dei RADICANDI

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

ES: $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3^3} = 2 \times 3 = 6$

ES 2 : $\sqrt[3]{-8} \times \sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-8)\cdot(-125)} = \sqrt[3]{1\cdot000} = \sqrt[3]{10^3}{}^{*} = 10$

* Ricordo : $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \Rightarrow \sqrt[3]{10^3} = 10^{\frac{3}{3}} = 10^1 = 10$

ES 3 : $\sqrt{4} \times \sqrt{9} \times \sqrt{25} = \sqrt{4\times9\times25} = \sqrt{900} = 30$

$2 \times 3 \times 5 = 30$

- QUOZIENTE di RADICALI con lo STESSO INDICE

Risultato = Radice che ha per indice lo stesso indice e per RADICANDO il QUOZIENTE dei RADICANDI

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{con } b \neq 0$$

ES : $\frac{\sqrt[2]{80}}{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[2]{\frac{80}{5}} = \sqrt[2]{16} = \sqrt[2]{4^2} = 4^{2/2} = 4$

ES 2 : $\frac{6\sqrt[2]{8}}{2\sqrt[2]{2}} =$ Semplifico dividendo i coefficienti $6:2 \Rightarrow 3\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{\frac{8}{2}} = 3\sqrt{4} = 3\cdot 2 =$

- Proprietà INVARIANTIVA dei radicali

MOLTIPLICANDO → Indice Radice = n
→ Esponente radicando = m non negativo

per uno STESSO VALORE = $s \neq 0 \in \mathbb{N}$ ⇒ il RISULTATO della RADICE NON CAMBIA

$$\sqrt[n\cdot s]{a^{m\cdot s}} = \sqrt[n]{a^m}$$

NB : anche $a \geq 0$: per evitare contraddizioni

ES : $\sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{2^2} =$ con $s = 2$ $\sqrt[2\cdot2]{2^{2\cdot2}} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{4/4} = 2$

ES 2 : $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} =$ con $s = 4$ $\sqrt[3\cdot4]{3^{3\cdot4}} = \sqrt[12]{3^{12}} = 3$

↳ $3^{12} = 531.441 \Rightarrow \sqrt[12]{531\cdot441} = 3$

M18

• **Riduzione di 2 Radicali allo STESSO INDICE**

Metodo: date $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[m]{b}$

1) Calcolo il minimo comune multiplo (m.c.m.) tra i due INDICI: n ed m ... che diventerà l'INDICE COMUNE a tutte le radici

2) DIVIDO il nuovo INDICE per gli indici delle due radici (n, m) ed ELEVO i radicandi (a, b) ai relativi QUOZIENTI

3) => Le nuove radici saranno EQUIVALENTI a quelle iniziali

ES: $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$: 1) m.c.m. tra 3 e 4 = 12

2) Trovo gli esponenti dei due radicandi: $\frac{12}{3} = 4$; $\frac{12}{4} = 3$

3) Unisco 1 e 2 ottengo: $\sqrt[12]{8^4}$, $\sqrt[12]{16^3}$

ES 2: $\sqrt[5]{2x^2}$, $\sqrt[4]{x^3}$ con $x \geq 0$ (anche X! ho solo cambiato colore!)

1) m.c.m.: $5 \cdot 4 = 20$ 2) Esponenti nuovi: $\frac{20}{5} = 4$, $\frac{20}{4} = 5$

3) $\sqrt[20]{(2x^2)^4} = \sqrt[20]{16x^8}$, $\sqrt[20]{(x^3)^5} = \sqrt[20]{x^{3 \cdot 5}} = \sqrt[20]{x^{15}}$

• Da quanto appena enunciato possiamo dedurre la: **Semplificazione dei Radicali**

$$\sqrt[s \cdot m]{a^{p \cdot s}} = \sqrt[m]{a^p}$$

ES: $\sqrt[4]{9} = \sqrt[2 \cdot 2]{3^2}$: posso semplificare i 2 tra loro ed ottengo: $\sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$

ES 2: $\sqrt[12]{8^3 y^6} = \sqrt[3 \cdot 4]{8^3 \cdot y^{2 \cdot 3}}$: divido esponenti ed Indice per 3 ed ottengo: $\sqrt[4]{8 \cdot y^2}$

Nota: $\sqrt[4]{(-5)^2}$: per poter semplificare dobbiamo usare il VALORE ASSOLUTO perché per definizione l'argomento di una radice di indice pari NON può essere NEGATIVO => $\sqrt[4]{(-5)^2} = \sqrt[4]{|-5|^2} = \sqrt[2]{|-5|} = \sqrt{5}$

→ Quindi possiamo effettuare MOLTIPLICAZIONI / DIVISIONI tra radicali con indici diversi, se, prima li riduciamo allo STESSO INDICE!

ES: $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[2]{3}$ 1) m.c.m. $= 3 \cdot 2 = 6$; 2) det. gli esponenti a cui elevare l'argomento: $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{6}{2} = 3$

$= \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{4 \times 27}$

$= \sqrt[6]{108}$

• Potenza di un Radicale: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\forall a \geq 0$; $n, m \in \mathbb{N}$

ES: $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

$\left(\sqrt[3]{-2}\right)^3 = \sqrt[3]{-2^3} = -2^{\frac{3}{3}} = -2^1 = -2$

$\left(\sqrt[3]{-64}\right) = -\sqrt[3]{8^2} = -\sqrt[3]{(2^3)^2} = -\sqrt[3]{2^6} = -(2^{\frac{6}{3}=2}) = -4$

• Radice di Radice

La radice m-esima di una radice n-esima con radicando "a" è una: =>

=> Radice che ha per radicando "a" e per indice il PRODOTTO degli indici: $m \times n$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \text{con } m, n \in \mathbb{N}$$

ES: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[3 \cdot 4]{a} = \sqrt[12]{a}$, con $a = 3$ => $\sqrt[12]{3}$

ES 2: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{111}} = \sqrt[3 \cdot 2]{111} = \sqrt[6]{111}$ ... ci si può arrivare trasformando le radici quadrate / cubiche come POTENZA con ESPONENTE FRAZIONARIO:

$\left(\sqrt{111}\right)^{\frac{1}{3}} = \left[(111)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$ ... potenza di una potenza => $111^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 111^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{111^1} = \sqrt[6]{111}$

M20

• Trasporto FATTORE sotto radice

$a, b \geq 0 \quad m \in \mathbb{N}$	$a<0,\ b\geq 0 \quad m \in \mathbb{N}$
Caso 1: $a \geq 0$	Caso 2: $a<0$
• $a \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m \cdot b}$	$-a \cdot \sqrt[m]{b} \Rightarrow -\sqrt[m]{a^m \cdot b}$

Nota: nel caso in cui il fattore sia NEGATIVO porto sotto radice il coefficiente, mentre il segno rimane fuori

ES: $2 \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{32} \quad \left(\sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{32}\right)$

ES 2: $-5\sqrt[2]{7} = -\sqrt{5^2 \cdot 7} = -\sqrt{25 \cdot 7} = -\sqrt{175}$

• Trasporto FATTORE fuori RADICE

$a, b \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[m]{a^m \cdot b} = a \cdot \sqrt[m]{b}$$

ES: $\sqrt{12} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[4]{5}$

... generalizzando...

$$\sqrt[m]{a^{m \cdot q} \cdot b} = a^q \cdot \sqrt[m]{b}$$

ES: $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^{3\cdot 2} \cdot 3} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{3} = 4 \cdot \sqrt[3]{3}$

$\sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{3} = (2^6)^{1/3} \cdot (3)^{1/3} = 2^{6 \cdot \frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 2^2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \sqrt[3]{3}$

ES 2: $\sqrt[4]{160} = \sqrt[4]{2^5 \cdot 5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 5} = 2\sqrt[4]{10}$

$= (2^4 \cdot 2 \cdot 5)^{\frac{1}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{5} = 2 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[4]{10}$

ES 3: $\sqrt[5]{98304}$: Scompongo in fattori $98304 = 2^{15} \cdot 3$

98304	3	512	2^7	4	2^{14}
32768	2	256	2^8	2	2^{15}
16384	2^2	128	2^9	1	
8192	2^3	64	2^{10}		
4096	2^4	32	2^{11}		
2048	2^5	16	2^{12}		
1024	2^6	8	2^{13}		

$= \sqrt[5]{2^{15} \cdot 3} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^{10} \cdot 3} = \underbrace{2^{5 \cdot \frac{1}{5}} \cdot 2^{10 \cdot \frac{1}{5}}}_{\text{passaggio in cui ho scomposto } 2^{15} \text{... a scopo dimostrativo!}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} =$

$= 2 \cdot 2^2 \cdot 3^{1/5} = 2^3 \cdot \sqrt[5]{3^1} = 8 \cdot \sqrt[5]{3}$

Esempio: trasportare fattore sotto radice

$-3^2\cdot\sqrt[3]{3}$ ... ricordo che il segno − rimane FUORI dalla radice!

$-\sqrt[3]{3^{2\times3}\cdot 3} = -\sqrt[3]{3^6\cdot 3^1} = -\sqrt[3]{3^{6+1}} = -\sqrt[3]{3^7}$

ES. da youmath.it

I) $\sqrt{36} = \sqrt{2^2\cdot 3^2} = \sqrt{6^2} = 6^{2\cdot\frac{1}{2}} = 6$

II) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10\cdot 10\cdot 10} = \sqrt[3]{10^3} = 10$

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$= 2^2\cdot 3^2 = 36$

III) $\sqrt[3]{-343} = \sqrt[3]{-7^3} = -7$

IV) $\sqrt{-25}$ = non c'è un numero che elevato ad un indice dispari dia -25 (*)

OK => mentre non esistono numeri elevati ad esponenti pari che possono dare come risultato un valore negativo <= OK

(*) considerazione che non ha senso!!

V) $\sqrt[3]{20+\sqrt{44+\sqrt{30-\sqrt{23+\sqrt[3]{8}}}}}$ = $\sqrt{23+2}=\sqrt{25}=5$, $\sqrt{30-5}=\sqrt{25}=5$

$\sqrt{23+2}$ $\qquad$ $\sqrt{44+5}=\sqrt{49}=7$, $\sqrt[3]{20+7}=\sqrt[3]{27}=3$

Partendo dalla radice cubica di 8 sono andato a ritroso con le altre radici

VI) $\sqrt[5]{29+\sqrt[4]{74+\sqrt{46+\sqrt[3]{27}}}}$. Parto sempre dalla radice più interna: $\sqrt[3]{27}=3$.

$\sqrt{46+3} = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow \sqrt{74+7} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \Rightarrow \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

VII) $\sqrt[n-1]{2^{2n-2}}$ con $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$

provo: $\sqrt[n-1]{2^{2(n-1)}} = \left(2^{2(n-1)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 2^{2(n-1)\cdot\frac{1}{(n-1)}} = 2^2 = 4$

per renderlo + semplice sostituisco $(n-1)$ con a: $\sqrt[a]{2^{2a}} = \left(2^{2a}\right)^{\frac{1}{a}} = 2^{2a\cdot\frac{1}{a}} = 2^2 = 4$

↳ ricordo: $\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n}$ $= 2^{\frac{2(n-1)}{(n-1)}} = 2^2 = 4$

VIII) $25^{\frac{3}{2}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 5^{2\cdot\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$

IX) $8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$ Nota: $8^{-1} \neq -8$!!!

↳ posso riscriverlo come: $8^0 : 8^1 = 1:8 = \frac{1}{8}$

X) $\left(\frac{8a^3}{b^6}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2^{3\cdot\frac{2}{3}}\cdot a^{3\cdot\frac{2}{3}}}{b^{6\cdot\frac{2}{3}}} = \frac{2^2\cdot a^2}{b^4} = \frac{4a^2}{b^4}$

↳ $b\neq 0$