PRODOTTI NOTEVOLI

Cosa sono? Sono formule di calcolo che permettono di velocizzare certe potenze e prodotti tra polinomi

... e viceversa di...

Scomporre determinati polinomi

Quali sono? **1. SOMMA per DIFFERENZA**

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

= quadrato del I Termine − quadrato del II termine

ES: $(3ab^2 + x^2)\cdot(3ab^2 - x^2) = (3ab^2)^2 - (x^2)^2 = (3^2 \cdot a^{1\cdot 2} \cdot b^{2\cdot 2}) - (x^{2\cdot 2})$

$= 9a^2b^4 - x^4$

Se avessimo affrontato la moltiplicazione dei 2 binomi:

$9a^2b^4 - 3\cancel{ab^2x} + 3\cancel{ab^2x} - x^4 = 9a^2b^4 - x^4$

ES 2: $\left(-\frac{2}{3}x - y\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}x + y\right) = \left(-\frac{2}{3}x\right)^2 - (y)^2 = \frac{4}{9}x^2 - y^2$

$(A - B)\cdot(A + B)$

ES 3: vediamo la formula ... da destra a sinistra!

$\left(x^{10} - \frac{1}{25}\right) = \left(x^5 + \frac{1}{5}\right)\cdot\left(x^5 - \frac{1}{5}\right)$

$(A^2 - B^2) = (A+B)\cdot(A-B)$

Se $A^2 = x^{10} \Rightarrow A = x^5$; $B^2 = 1/25 \Rightarrow B = 1/5$

ES 4: $(a^8 - b^8) \Rightarrow (a^4 - b^4)(a^4 + b^4) \Rightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

$\Rightarrow (a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

2. QUADRATO di BINOMIO

A. SOMMA: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

B. DIFFERENZA: $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

ES: $(2a+3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 12ab$

$A = 2a \Rightarrow A^2 = (2a)^2 = 4a^2$; $B = 3b \Rightarrow B^2 = (3b)^2 = 9b^2$

$2 \cdot A \cdot B = 2 \cdot 2a \cdot 3b = (2 \cdot 2 \cdot 3)\, ab = 12ab$

... metodo + lungo...

$(2a+3b)^2 = (2a+3b)(2a+3b) = 4a^2 + 6ab + 6ab + 9b^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

ES2: $(m^4 - 3m)^2 = m^8 + 9m^2 - 2 \cdot m^4 \cdot 3m = m^8 + 9m^2 - 6m^4m$

ES3: $(-3x - 5y^2)^2 = (-3x)^2 + (-5y^2)^2 + 2(-3x)(-5y^2) =$

$9x^2 + 25y^4 + 30xy^2$

ES4: ... usiamo la formula al contrario... $49a^2b^2 + 4a^2 - 28a^2b$

$A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B$

$= (7ab - 2a)^2$

Se $A^2 = 49a^2b^2 \Rightarrow A = 7ab$

$B^2 = 4a^2 \Rightarrow B = 2a$

$2AB = 2 \cdot 7ab \cdot 2a = (2 \cdot 7 \cdot 2)\, a^{1+1} \cdot b = 28a^2b$ ... poiché il doppio prodotto è negativo $\Rightarrow$ uno dei due monomi deve avere il segno negativo!

3. QUADRATO di TRINOMIO

A. SOMMA: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

B. DIFFERENZA: $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

ES: $(2x+3y+1)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (1)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 2 \cdot 2x \cdot 3y$

$+ 2 \cdot 3y \cdot 1 = 4x^2 + 9y^2 + 1 + 4x + 12xy + 6y$

ES 2: $(m^2 + m - 3)^2 = m^4 + m^2 + 9 + 2m^2m - 6m^2 - 6m$

ES 3: ... applichiamo la formula al contrario...

$(x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz) = (x - y + 2z)^2$

$x^2 \quad + y^2 \quad (2z)^2$

$x \quad -y \quad +2z \quad +2x(-y) + 2x(2z) + 2(-y) \cdot 2z$

$-2xy \quad +4xz \quad -4yz$

→ Metodo: conto i monomi: sono 6! Potrebbe essere il QUADRATO di un TRINO. Cerco 3 quadrati e poi ne verifico i doppi prodotti!

4. CUBO di BINOMIO

A. SOMMA: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

B. DIFFERENZA: $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

: $(-a+b)^3 = -a^3 + b^3 + 3a^2b - 3ab^2$

ES: $(2a+1)^3 = (2a)^3 + 1^3 + 3(2a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2a \cdot 1^2$

$= 2^3a^3 + 1 + (3\cdot 4\cdot 1)a^2 + (3\cdot 2\cdot 1)a$

$= 8a^3 + 1 + 12a^2 + 6a$

ES 2: $(-3a^3 + 2b^2)^3 = (-3a^3)^3 + (2b^2)^3 + 3(-3a^3)^2 \cdot 2b^2 + 3(-3a^3)\cdot(\underbrace{4b^4}_{(2b^2)^2})$

$= -27a^9 + 8b^6 + (3\cdot 9\cdot 2)a^6b^2 + (3\cdot[-3]\cdot 4)a^3b^4$; $+9a^6$

$= -27a^9 + 8b^6 + 54a^6b^2 - 36a^3b^4$

NOTA: $(-3a^3)^3 = (-3a^3)(-3a^3)(-3a^3)$

Segni: $- \cdot - = + \cdot - = -$

Coefficienti: $3 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$

Parte letterale: $a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6 \cdot a^3 = a^{6+3} = a^9$

$\Big\} -27a^9$

ES 3: ... applico la formula al "contrario" ...

$a^6 + 9a^4b + 27a^2b^2 + 27b^3$ = ...1. ci sono 4 monomi: potrebbe essere il cubo di un binomio! 2. Cerco eventuali "cubi"

$a^6 = (a^2)^3$ e $27b^3 = (3b)^3$... ottimo!

3. Verifico i tripli prodotti: $3\cdot(a^2)^2\cdot 3b = 9a^4b$: OK ; $3\cdot(a^2)\cdot(3b)^2 = 27a^2b^2$ => OK

4. Ho un Cubo di un binomio!!

$(a^2+3b)^3$

5. CUBO di TRINOMIO

$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3bc^2 + 3ab^2 + 3ac^2$

[redacted] $+ 6abc$

In tutto ci sono 10 termini! Attenzione ai tripli prodotti ed all'ultimo termine

$+6abc$

P.S. prodotto "poco" notevole! mai USATO!

6 SOMMA o DIFFERENZA di CUBI

A. SOMMA : $A^3 + B^3 = (A+B)\cdot(A^2 - AB + B^2)$

B. DIFFERENZA : $A^3 - B^3 = (A-B)\cdot(A^2 + AB + B^2)$

Nota : Attenzione ai SEGNI !!!

ES : $27b^3 + 125x^3 \Rightarrow A^3 = 27b^3 \Rightarrow A = \sqrt[3]{27b^3} = 3b \Rightarrow A^2 = (3b)^2 = 9b^2$

$B^3 = 125x^3 \Rightarrow B = 5x \Rightarrow B^2 = 25x^2$

$A\cdot B = 3b\cdot 5x = (3\cdot 5)bx = 15bx$ ... unisco il tutto...

$= (3b + 5x)(9b^2 - 15bx + 25x^2)$

ES 2 : applichiamo la formula al contrario...

$(2x-1)\cdot(4x^2 + 2x + 1)$ ... $\left.\begin{array}{l} A = 2x \Rightarrow A^2 = 4x^2 \\ B = 1 = B^2 \; ; \; A\cdot B = 2x\cdot 1 = 2x \end{array}\right\}$ tutti i termini corrispondono !!!

riscrivo il prodotto delle 2 parentesi come : $A^3 - B^3 = (2x)^3 - 1^3 = 8x^3 - 1$

Nota: avendo riconosciuto il PN. ci siamo risparmiati :

$(2x-1)(4x^2+2x+1) = 8x^3 + \cancel{4x^2} + \cancel{2x} - \cancel{4x^2} - \cancel{2x} - 1 = 8x^3 - 1$

forse vi sembrerà poco... ma oltre alla perdita di tempo vi sono maggiori rischi nei calcoli!

TRINOMIO NOTEVOLE

E' un metodo di SCOMPOSIZIONE molto utile! è l'INVERSO della moltiplicazione fra binomi

Dato il trinomio : $x^2 + Sx + P$ con S e $P \neq 0$

possiamo trovare 2 NUMERI tali che : $\begin{cases} t_1 + t_2 = S \\ t_1 \cdot t_2 = P \end{cases}$ che ci permettono di SCOMPORRE il trinomio come : $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x+t_1)(x+t_2) = x^2 + Sx + P$

ES: $x^2 + 7x + 12$ ... devo trovare 2 numeri tali che: Sommati tra loro diano: 7

e che il loro Prodotto sia uguale a 12 ... 5 e 2 ? + = 7 ma x = 10! NO!

Provo : 4 e 3 ⇒ + = 7 , x = 12 : OK! ⇒ $x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3)$ ... verifico...

$x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + 7x + 12$ C.V.D.

Lo approfondisco a pag. M8 M9 M10

M26

ESERCIZI:

I. $(a+2)^2 =$ quadrato di binomio $= (a)^2 + (2^2) + 2 \cdot a \cdot 2 = a^2 + 4 + 4a$

II. $(x+y)^2 - (x-y)^2 =$ $A = x+y$, $B = x-y$ $\Rightarrow A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$(x+\cancel{y}+x-\cancel{y})(\cancel{x}+y-\cancel{x}+y) = 2x \cdot 2y = 4xy$

$(A + B) \cdot (A - \underbrace{[x-y]}_{=B})$

III. $(x+2)(x-2) + (2y-3)(2y+3) =$ siamo ancora nel caso dei PN somma x differ.

$x = A$, $2 = B$ $\quad$ A $\quad$ B

$x^2 - 4 + (2y)^2 - (3)^2 = x^2 - 4 + 4y^2 - 9 = x^2 + 4y^2 - 13$

IV. $(a+b)^3 - (1+b)^3 =$ PN cubo di binomio

$a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 - (1 + b^3 + 3b + 3b^2) = a^3 + \cancel{b^3} + 3a^2b + 3ab^2 - 1 - \cancel{b^3} - 3b - 3b^2$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3b - 3b^2 - 1$

V. $(x+y+z)^2 - (x-y-z)^2 =$ quadrato di trinomio

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz) =$

$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} + 2xy + 2xz + \cancel{2yz} - \cancel{x^2} - \cancel{y^2} - \cancel{z^2} + 2xy + 2xz - \cancel{2yz} =$

$4xy + 4xz = 4x(y+z)$

Nota: nel secondo trinomio attenzione ai segni dei Doppi Prodotti!

$+2(+x)(-y) = -2xy$; $+2(+x)(-z) = -2xz$; $+2(-y)(-z) = 2yz$

VI. $\underbrace{(x-y)(x^2+xy+y^2)}_{\text{Differenza di cubi}} + \underbrace{(x+y)(x^2-xy+y^2)}_{\text{Somma di Cubi}}$

$x^3 - y^3 + x^3 + y^3 = 2x^3$

VII. $(x+y)^2 - (x+y)(x-y) + (x+y)^3$ ... svolgo i calcoli...

$x^2 + y^2 + 2xy - (x^2 - y^2) + x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = \cancel{x^2} + y^2 + 2xy - \cancel{x^2} + y^2 + x^3 + y^3 +$

$+ 3x^2y + 3xy^2 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 2y^2 + 2xy$

VIII. $x^3 - 8 + (x-2)(x+2) - (x+2)^3$ ... svolgo i prodotti notevoli...

$= x^3 - 8 + x^2 - 4 - (x^3 + 8 + 6x^2 + 12x) = \cancel{x^3} + x^2 - 12 - \cancel{x^3} - 8 - 6x^2 - 12x =$

$-5x^2 -$ [redacted] $x - 20$

12

$a^{3\cdot 2} = a^6 \quad -b^3\cdot(-b^3) = +b^{3+3} = b^6$ M27

IX) $a^6-b^6+(a^3-b^3)^2+b^3(a^3+2b^3) = a^6-b^6+(a^3)^2+(-b^3)^2-2a^3b^3+$
$+a^3b^3+2b^{3+3} = a^6-\cancel{b^6}+a^6+\cancel{b^6}-2a^3b^3+a^3b^3+2b^6 = 2a^6-a^3b^3+2b^6$

ESERCIZI VARI...

$(a-2b)(a+2b) =$ somma x differenza! $= a^2-4b^2$

$\left(\frac{1}{2}a+3b\right)\left(\frac{1}{2}a-3b\right)+3b^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2-(3b)^2+3b^2 = \frac{1}{4}a^2-9b^2+3b^2 = \frac{1}{4}a^2-6b^2$

$\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2-2ab = \frac{1}{4}a^2+b^2+2\cdot\frac{1}{2}a(-b)-2ab = \frac{1}{4}a^2+b^2-ab-2ab = \frac{1}{4}a^2+b^2-3ab$

$\left(\frac{1}{2}a-b+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2+b^2+\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{2}a(-b)+2\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}+2\cdot(-b)\cdot\frac{1}{3} =$
$\frac{1}{4}a^2+b^2+\frac{1}{9}-ab+\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b =$ quadrato di un trinomio!

$\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3 =$ cubo di binomio $= \left(\frac{1}{2}a\right)^3+\left(-\frac{2}{3}b\right)^3+3\left(\frac{1}{2}a\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}b\right)+$
$+3\left(\frac{1}{2}a\right)\left(-\frac{2}{3}b\right)^2 = \frac{1}{8}a^3-\frac{8}{27}b^3-\left(3\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\right)a^2b+\left(\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{9}_3}\right)ab^2 =$
$= \frac{1}{8}a^3-\frac{8}{27}b^3-\frac{a^2b}{2}+\frac{2}{3}ab^2$

$(a^2-a-3)^2-(a^2+a+3)^2 = \cancel{a^4}+\cancel{a^2}+\cancel{9}-\underbrace{2a^2\cdot a}_{-2a^3}-\underbrace{3\cdot 2a^2}_{-6a^2}+\cancel{6a}$
$-(\cancel{a^4}+\cancel{a^2}+\cancel{9}+2a^3+6a^2+\cancel{6a})$
$= -4a^3-12a^2 = -4a^2(a+3)$

$(x+2)^3-(x+3+x^2)^2+x^3+x^4+1 = x^3+8+6x^2+12x-(x^2+9+x^4+$
$+6x+2x^3+6x^2)+x^3+x^4+1 = \cancel{2x^3}+\cancel{9}+\cancel{6x^2}+12x+\cancel{x^4}-x^2-\cancel{9}-\cancel{x^4}-6x$
$-\cancel{2x^3}-\cancel{6x^2} = -x^2+6x$

$(2a+b)(a+2b)-(a-b)(2a-2b) = 2a^2+4ab+ab+2b^2-(2a^2-2ab-2ab+2b^2)$
$\cancel{2a^2}+4ab+ab+\cancel{2b^2}-\cancel{2a^2}+2ab+2ab-\cancel{2b^2} = 9ab$

$(4a+3b)^3-3(4a+3b)^2(4a+b)+3(4a+3b)(4a+b)^2-(4a+b)^3$
$4a+3b = A \Rightarrow A^3=(4a+3b)^3 \Rightarrow A^2=(4a+3b)^2 \Rightarrow 3A^2B = 3(4a+3b)^2(4a+6) \leftarrow$ "−"
$4a+b = B \Rightarrow B^3=(4a+b)^3 \Rightarrow B^2=(4a+b)^2 \Rightarrow 3AB = 3(4a+3b)(4a+b)^2$
$(A-B)^3 = (\cancel{4a}+3b-\cancel{4a}-b)^3 = (2b)^3 = 8b^3$